tendeixi a infinit, el polígon es va assemblant més i més a un cercle. El mateix passa amb el grup de simetries, passant d'un grup finit en el cas discret del n-gon a un grup continu en el cas del cercle. Això il·lustra la natura dels grups lineals.

Durant la dècada dels seixanta, Tits va crear un marc geomètric per estudiar els grups lineals. En un sistema teòric extraordinari, donant noms provinents de l'arquitectura a tots els conceptes, Tits podia donar una descripció geomètrica d'estructures purament algebraiques. Crea els *buildings, els apartments* i les *galleries*; els noms de les components de la construcció ajuden el lector a crear una intuïció molt profitosa de qüestions algebraiques difícils.

L'arquitectura de Tits no només és una construcció espectacular d'interès teòric. El Comitè menciona diverses aplicacions d'aquesta construcció: *La teoria de construccions és un principi unificador central d'una varietat extraordinària d'aplicacions, com per exemple a la classificació de grups algebraics i grups de Lie, a grups finits simples, a grups de Kac-Moody (utilitzats pels físics teòrics), a geometria combinatòria (utilitzada en informàtica) i a l'estudi del fenomen de rigidesa en espais de curvatura negativa.*

Un altre camp esmentat pel Comitè lliga els dos homenatjats: *L'aproximació a la geometria de Tits va ser essencial en l'estudi i desenvolupament dels grups esporàdics, incloent el Monstre.*

Un dels grups esporàdics està sovint relacionat amb Tits: l'anomenat *grup de Janko–Hall*. Tits va descriure aquest grup com el grup d'automorfismes d'un graf de 100 vèrtexs i 1.800 arestes. Aquest grup té ordre 604.800; sovint Tits fa broma sobre aquest nombre: *l'ordre 604.800 del grup de Janko–Hall coincideix amb el nombre de segons d'una setmana.* Tits també té el seu nom lligat a una altra branca de la teoria de grups. Citant el Comitè: *[Tits] també va establir la cèlebre «alternativa de Tits»: tot grup lineal finitament generat és virtualment resoluble o bé conté una còpia del grup lliure amb dos generadors. Aquest resultat ha inspirat nombroses variacions i aplicacions.*

Un grup *virtualment resoluble* és un grup que conté un subgrup d'índex finit resoluble. Un *grup lliure* amb dos generadors és generat per aquests dos generadors, i no hi ha relacions entre ells ni entre les seves potències. Per tant, si un grup lineal finitament generat és tal que no podem trobar dos generadors lliures, aleshores com a mínim conté un subgrup resoluble d'índex finit. L'alternativa de Tits és un altre resultat profund i potent que il·lumina la teoria de grups.

Premi FSB 2007

«Lectures on determinantal ideals»

Rosa Maria Miró-Roig

La font clàssica sobre el tema d'ideals determinantals ha estat, i segueix essent, el llibre *Determinantal Rings* de Winfried Bruns i Udo Vetter, publicat el 1988 i ara ja exhaurit (però disponible en línia a [2]). Aquests autors comencen amb l'observació «els anells i les varietats determinantals han estat un tema central d'àlgebra commutativa i de geometria algebraica. El seu estudi ha atret molts investigadors prominents i ha motivat la creació de teories que es poden considerar en l'actualitat part de la teoria general d'anells commutatius.» I continuen dient: «són algebristes i, per tant, el tema serà tractat des d'un punt de vista algebraic».

Durant els aproximadament vint anys des de la publicació del llibre de Bruns i Vetter, el tema ha continuat inspirant força recerca i, de fet, molta d'ella ha tingut més sabor geomètric que no pas algebraic. Aquest nou i preciós llibre escrit per Rosa Maria Miró-Roig proporciona l'útil servei d'il·lustrar algunes de les direccions geomètriques d'aquesta línia de recerca, des de la perspectiva d'un dels autors més actius en aquesta aventura. Mentre que, certament, durant aquest temps també s'ha fet molta recerca en altres direccions, els temes coberts a la monografia són tractats de manera molt entenedora, i donen al lector una idea acurada de la situació

actual i de la bellesa d'aquest tema. És un text molt clar, gairebé autocontingut, i força mereixedor del premi Ferran Sunyer i Balaguer 2007. L'entusiasme de l'autora per a aquest tema hi és ben palès.

En gran mesura, l'interès i la feina feta per la Rosa Maria en aquesta àrea neix de la col·laboració conjunta [8], que ella i jo vam escriure juntament amb Jan Kleppe, Uwe Nagel i Chris Peterson, encara que ha anat força més lluny d'aquelles arrels inicials. Aquella col·laboració va inspirar molts altres treballs de diversos autors, entre els quals figura el seu llibre i un altre que vaig escriure sobre teoria de l'enllaç i mòduls de deficiència [9]. Mentre escric aquesta ressenya, em vénen a la memòria les tres setmanes de 1997, quan tots cinc ens vam trobar a Barcelona per a estudiar aquests temes, com un dels moments de treball més emocionants i entranyables que mai he tingut: bons amics, bon menjar i vi espanyols, i un bon ritme de progrés sobre les qüestions que estàvem estudiant. Què millor que tot això!

El tema general del treball de la Rosa Maria (tant en aquest llibre com en gran part dels seus treballs d'investigació) són els subesquemes d'un espai projectiu $\mathbb{P}^n$; per tant, tots els ideals que estudia són homogenis (és a dir, admeten un conjunt de generadors que consta de polinomis homogenis) a l'anell de polinomis $R = K[x_0, \ldots, x_n]$, on K és un cos algebraicament tancat de característica zero.

El llibre de la Rosa Maria comença amb un capítol d'introducció. Primer explica resultats bàsics sobre resolucions lliures minimals, funcions i polinomis de Hilbert, esquemes ACM, esquemes AG, ideals determinantals i teoria de l'enllaç. Molt del material d'aquest capítol (així com també parts del segon i del tercer) es pot trobar també a [9], referència no citada al llibre de la Rosa Maria; el lector interessat pot consultar també aquesta referència.

Donarem primer una breu visió de conjunt d'aquest material bàsic, com qui fa una visita de deu minuts al Museu del Prado.

Un subesquema, V, de l'espai projectiu es defineix a través d'un ideal homogeni saturat I_V, o, equivalentment, a través del feix ideal $\mathcal{I}_V$. Diem que V és aritmèticament Cohen-Macaulay (ACM) si R/I_V és un anell Cohen-Macaulay. Hi ha una formulació equivalent donada per l'anul·lació de la cohomologia $H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{I}_V(t))$ per a tot t i per $1 \leq i \leq \dim V$, i una altra en termes de la resolució lliure minimal de R/I_V (concretament, que la llargada d'aquesta resolució coincideixi amb la codimensió de V). Més generalment, l'obstrucció de V per a ser ACM pot ser mesurada pels mòduls de deficiència $\bigoplus_t H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{I}_V(t))$, per a $1 \leq i \leq \dim V$.

Diem que V és aritmèticament Gorenstein (AG) si R/I_V és un anell de Gorenstein. Equivalentment, V és AG si és ACM i l'últim mòdul en la resolució lliure minimal de R/I_V té rang 1. En són un cas especial els V d'*intersecció completa*, i. e. quan la codimensió de V és igual al nombre mínim de generadors de I_V.

Com el seu nom suggereix, un *ideal determinantal* $I_r(\mathcal{A})$ és un ideal que estigui generat pels menors $r \times r$ d'una matriu $\mathcal{A}$ amb entrades polinòmiques i mida $p \times q$. Com que volem ideals homogenis, exigim que la mateixa matriu $\mathcal{A}$ sigui homogènia; és a dir, que $\mathcal{A}$ representi un morfisme de R-mòduls lliures graduats $\phi\colon F \to G$ de grau zero i, per tant, que els seus menors siguin homogenis. Si els menors són maximals, és a dir si $r = \max\{p, q\}$, diem que aquest ideal és *determinantal estàndard*. Si $\mathcal{A}$ és una matriu $m \times m$ simètrica i homogènia llavors $I_r(\mathcal{A})$ s'anomena un *ideal determinantal simètric*. De fet, en tots aquests casos hi ha una suposició tècnica addicional sobre la codimensió del *locus* (el lloc geomètric definit per aquests menors), que no mencionarem aquí. Comentem, però, que imposant una condició encara més forta sobre el *locus* d'una certa submatriu, obtenim uns ideals determinantals estàndards especials anomenats *bons ideals determinantals*.

Quan volem estudiar el *locus* a l'espai projectiu definit per un ideal determinantal de qualsevol classe, ens referim a una *varietat determinantal* o, més generalment, a un *esquema determinantal*. Diverses varietats clàssiques, com les varietats de Segre, els *scrolls* racionals normals o les varietats de Veronese, són exemples d'esquemes determinantals. La Rosa Maria dóna tot el *background* necessari sobre ideals determinantals, incloent temes com el complex d'Eagon-Northcott i el complex de Buchsbaum-Rim. També introdueix els esquemes paramètrics $W(\underline{b}, \underline{a})$ per a esquemes determinantals, que seran d'interès a la segona meitat del llibre.

Aquests temes, especialment la noció d'esquemes AG, són centrals per a la teoria de

l'enllaç. Des del punt de vista geomètric, dos subesquemes es diu que estan *G-enllaçats* (resp. *CI-enllaçats*) si són equidimensionals sense components en comú, i la seva unió és AG (resp. una intersecció completa). Hi ha una reformulació algebraica, que ometrem aquí, que evita la necessitat de no tenir components en comú. La relació d'equivalència generada per aquests enllaços s'anomena *G-liaison* (resp. *CI-liaison*) i, en ambdós casos, podem refinar-la considerant la relació d'equivalència *even liaison*, generada per quantitats parells dels esmentats enllaços. (Una de les filosofies que sorgiren de [8] és precisament que l'*even G-liaison* és, en gran mesura, una teoria de divisors per a subesquemes ACM. Aquest punt de vista ha estat llargament desenvolupat des de llavors, principalment per Hartshorne en una sèrie d'articles seus.)

En el cas de codimensió dos, moltes de les idees esmentades s'expressen conjuntament d'una manera particularment simple i elegant. Primer, en aquest context tots els esquemes AG són interseccions completes. La resolució lliure minimal de l'anell de coordenades R/I_V d'un esquema ACM de codimensió dos té llargada dos i, per tant, té la forma

$$0 \to \mathbb{F}_2 \xrightarrow{\times A} \mathbb{F}_1 \to R \to R/I_V \to 0,$$

on $\operatorname{rank} \mathbb{F}_1 = \operatorname{rank} \mathbb{F}_2 + 1$. La matriu A s'anomena matriu de Hilbert-Burch de V, i el cèlebre teorema de Hilbert i Burch diu que els menors maximals de A formen un conjunt generador minimal per a I_V. Així, els esquemes ACM de codimensió dos són sempre determinantals estàndard. Això no és cert per a codimensions superiors.

El capítol 2 comença amb més resultats bàsics sobre teoria de l'enllaç en codimensió arbitrària. Aquí la Rosa Maria descriu el comportament de certes resolucions localment lliures de $\mathcal{I}_V$ sota enllaç (utilitzant un argument estàndard sobre *mapping cones*) i, com a conseqüència, descriu de quina manera els mòduls de deficiència són invariants. És a dir, si V_1 i V_2 estan enllaçats, llavors els mòduls de deficiència de V_1 i V_2 estan relacionats per una combinació una mica tècnica de desplaçament, dualitat i intercanvi d'índexs. I una conseqüència immediata n'és la invariància per enllaç de la propietat ACM; això és central per a molts dels temes d'aquest llibre. Una altra bonica i important conseqüència és que si V_1 i V_2 estan parellament enllaçats llavors hi ha un enter fix d tal que $H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{I}_{V_1}(t)) \cong H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{I}_{V_2}(t+d))$ per a tot $1 \leq i \leq \dim V_1$ i tot t.

Un dels primers resultats importants sobre teoria de l'enllaç diu que, en codimensió dos, tots els esquemes ACM són a la classe de *CI-liaison* d'una intersecció completa (i. e. són esquemes anomenats *licci*). Això és un resultat de Gaeta [3] i d'Apery [1] per a corbes de $\mathbb{P}^3$, i de Peskine i Szpiro [12] en general i en el llenguatge modern d'esquemes; normalment es coneix com a teorema de Gaeta. Un dels problemes que motivaren [8] fou el següent: fins a quin punt es pot estendre a codimensió més alta, el teorema de Gaeta que, per codimensió dos, diu que tots els esquemes ACM són *licci*? Tal com la Rosa Maria explica detalladament en les primeres dues seccions del capítol 2, hi ha bastant a dir sobre les classes de *CI-liaison* de subesquemes ACM de codimensió ≥ 3. Un d'aquests resultats és el fet que hi ha infinites classes de *CI-liaison* que contenen esquemes determinantals estàndards. Però en certa manera, un problema més prometedor és el de determinar què es pot dir per a *G-liaison*.

És encara una pregunta oberta de gran interès si tots els esquemes ACM són a la classe de *G-liaison* d'una intersecció completa (anomenats esquemes *glicci*). Se sap [10] que la resposta és afirmativa llevat deformació, però més enllà d'això no hi ha cap resultat general conegut. Tanmateix una de les idees del nostre grup de Barcelona fou que, en codimensió dos, és més productiu pensar en els nostres esquemes com a determinantals estàndard, més que com a esquemes ACM (tot i que són nocions equivalents en aquell context). Això va portar a un dels nostres resultats més interessants, generalitzant directament el teorema de Gaeta: els ideals determinantals estàndard són *glicci* en qualsevol codimensió! L'última secció del capítol 2 esbossa la prova d'aquest resultat.

En matemàtiques, sovint es dóna el cas que quan una pregunta oberta és massa difícil, es poden extreure idees mirant certs casos particulars especialment interessants, fins i tot encara que els mètodes usats siguin massa especials per a esperar poder estendre'ls al cas general. Un d'aquests problemes oberts és el ja mencionat sobre si els subesquemes ACM són *glicci*, i els ideals determinantals estàndard van proporcionar una primera classe àmplia molt interessant d'exem-

ples. Una altra conjectura important en què els ideals determinantals proporcionen també una classe àmplia i interessant d'exemples és la *conjectura de la multiplicitat*, que ara expliquem.

Sigui R/I una àlgebra de Cohen-Macaulay graduada, de codimensió c, i amb resolució lliure minimal

$$0 \to \mathbb{F}_c \to \mathbb{F}_{c-1} \to \cdots \\ \to \mathbb{F}_2 \to \mathbb{F}_1 \to R \to R/I \to 0.$$

Cadascun d'aquests mòduls lliures és un sumand directe de còpies torçades de R; en particular, cada sumand és de la forma $R(-a)$ per a algun enter positiu a. Per a l'i-èsim mòdul lliure $\mathbb{F}_i$, denotem per m_i el més petit d'aquests enters positius, i per M_i el més gran. Denotem per $e(R/I)$ la multiplicitat de R/I —en el cas en què I és l'ideal saturat d'un subesquema V de $\mathbb{P}^n$, $e(R/I)$ és simplement el grau de V. Llavors la conjectura de la multiplicitat diu que

$$\frac{1}{c!}\prod_{i=1}^{c} m_i \leq e(R/I) \leq \frac{1}{c!}\prod_{i=1}^{c} M_i. \qquad (1)$$

Aquesta és una bonica conjectura, que ha inspirat molta recerca, però que roman oberta en general per a codimensió ≥ 3. La conjectura es deu a Herzog, Huneke i Srinivasan [5], i deriva d'un resultat de Huneke i Miller [7], els quals estudiaren el cas en què $m_i = M_i$ per a tot i (i. e. quan R/I té una resolució *pura*) i provaren que les dues desigualtats són igualtats en aquest cas. La *conjectura de multiplicitat estesa* ([6], [11]) diu que, al contrari, si alguna de les desigualtats de (1) és una igualtat, llavors l'altra també, i R/I té una resolució pura.

Al capítol 3 del seu llibre, la Rosa Maria tracta la conjectura de la multiplicitat per a ideals determinantals estàndard. Comença amb l'argument per a ideals determinantals estàndard de codimensió 2, tractat originalment a [5], que resol el cas ACM en codimensió 2. La conjectura de la multiplicitat per a ideals determinantals estàndard en codimensió arbitrària va ser demostrada per primer cop per la Rosa Maria mateix, encara que poc temps després d'aparèixer el seu preprint es resolia la conjectura de la multiplicitat estesa per a ideals determinantals estàndard (independentment i gairebé simultània) a [6] i [11]. Al capítol 3 dóna una prova d'aquest fet. En l'última mitja dècada s'han demostrat molts altres casos especials i extensions de la conjectura de la multiplicitat, però resoldre-la completament roman un problema central i desafiador en àlgebra commutativa.

Gran part dels capítols 4 i 5 es dediquen a descriure el treball de la Rosa Maria amb Jan Kleppe. El capítol 4 tracta un aspecte completament diferent dels esquemes determinantals estàndard: els seus esquemes de Hilbert corresponents. Si hom fixa els graus de les entrades d'una matriu homogènia (i. e. la *matriu de grau*) i hom considera totes les possibles matrius homogènies amb la matriu de grau donada i els esquemes que aquests ideals determinantals defineixen, es pot demostrar que el corresponent *locus* d'esquemes determinantals estàndard és irreductible dins el seu esquema de Hilbert. La Rosa Maria denota aquest lloc geomètric per $W_s(\underline{b}, \underline{a})$. El lloc geomètric dels esquemes determinantals bons és denotat per $W(\underline{b}, \underline{a})$.

Els tres problemes que s'estudien al capítol 4 són els següents: 1) trobar la dimensió de $W(\underline{b}, \underline{a})$ i de $W_s(\underline{b}, \underline{a})$; 2) determinar si la clausura de $W(\underline{b}, \underline{a})$ és una component en el corresponent esquema de Hilbert, i 3) és l'esquema de Hilbert corresponent genèricament llis al llarg de $W(\underline{b}, \underline{a})$? La Rosa Maria dóna solucions parcials a aquests tres problemes.

El lector s'haurà fixat que no hem parlat encara d'ideals determinantals simètrics. Aquests es reserven per al capítol 5, on Rosa Maria tracta tots els problemes anteriorment esmentats per al cas d'aquests ideals. Després de donar un resultat parcial, cita un teorema de Gorla [4] dient que tots aquests ideals són *glicci*. Respecte la conjectura de la multiplicitat, demostra tot un seguit de casos especials per a ideals determinantals simètrics, incloent el cas dels menors submaximals. Finalment, per a la llisor i dimensió de l'esquema de Hilbert, demostra un seguit de resultats parcials interessants i difícils, per a esquemes determinantals simètrics, principalment en el cas submaximal.

En resum, aquest llibre omple un buit amb el seu enfocament geomètric de l'estudi dels ideals i esquemes determinantals. Recull diversos problemes oberts importants sobre aquest tema i descriu diversos aspectes interessants dels treballs existents sobre aquests problemes. A més, és essencialment autocontingut. Es va escriure com una col·lecció estesa d'apunts d'una sèrie de conferències de la Rosa Maria a l'Indian Institute of Technology, a Mumbai. Com a tal, l'autora

se centra en els aspectes d'aquests problemes en els quals ha fet contribucions. Ha fet una feina admirable en l'organització i exposició. La meva única crítica és que el llibre hauria estat una referència més útil si la Rosa Maria hagués inclòs més citacions de treballs relacionats per al lector interessat (les seves llistes curtes a les pàgines 8, 66 i 130 no són suficients). Però això no és cap mancança seriosa, i ella mateixa l'admet en la seva introducció. En la introducció també expressa el seu desig que «el material que escullo serà beneficiós i clarificador per al lector.» En la meva opinió, donada la quantitat de feina interessant, extensa i impressionant que ha fet en aquesta àrea, ha aconseguit amb escreix aquest objectiu. És una referència valuosa per a tothom interessat en aquests temes. I, certament, tots els afortunats de tenir una còpia del llibre de Bruns i Vetter poden reservar el lloc adjacent de la prestatgeria per a aquest llibre.

Referències

[1] Apéry, R. *Sur certains caractères numeriques d'un idéal sans composant impropre.* C.R.A.S. 220 (1945), 234–236.

[2] Bruns W.; Vetter, U. «Determinantal Rings». *Lecture Notes in Mathematics*, 1327. Berlín: Springer-Verlag, 1988. Accessible a: ftp://ftp.mathematik.uni-osnabrueck.de/pub/osm/kommalg/DetRings.ps.gz.

[3] Gaeta, F. *Sulle curve sghembe algebriche di residuale finito.* Annali di Matematica s. iv, t. xxvii (1948), 177–241.

[4] Gorla, E. *The G-biliaison class of symmetric determinantal schemes.* Preprint math. AG/0505414.

[5] Herzog, J.; Srinivasan, H. «Bounds for multiplicities». *Trans. Amer. Math. Soc.*, 350 (1998), 2879–2902.

[6] Herzog, J.; Zheng, X. «Notes on the multiplicity conjecture». *Collect. Math.*, 57 (2006), núm. 2, 211–226.

[7] Huneke, C.; Miller, M. «A note on the multiplicity of Cohen-Macaulay algebras with pure resolutions». *Canad. J. Math.*, 37 (1985), 1149–1162.

[8] Kleppe, J.; Migliore, J.; Miró-Roig, R. M.; Nagel, U.; Peterson, C. *Gorenstein Liaison, Complete Intersection Liaison Invariants and Unobstructedness*, Memoirs of the Amer. Math. Soc., vol. 154, 2001, 116 pàgs. ISBN 0-8218-2738-3.

[9] Migliore, J. *Introduction to Liaison Theory and Deficiency Modules.* Birkhäuser, Progress in Mathematics, 165, 1998.

[10] Migliore, J.; Nagel, U. «Monomial Ideals and the Gorenstein Liaison Class of a Complete Intersection». *Compositio Math.*, 133 (2002), 25–36.

[11] Migliore, J.; Nagel, U.; Römer, T. «Extensions of the Multiplicity Conjecture». Per publicar a *Trans. Amer. Math. Soc.*

[12] Peskine, C.; Szpiro, L. «Liaison des variétés algébriques. I». *Inv. Math.*, 26 (1974), 271–302.

[13] Rao, P. *Liaison among Curves in* $\mathbb{P}^3$. *Invent. Math.*, 50 (1979), 205–217.

Tal com està indicat a les bases del premi, el treball ha estat publicat per l'Editorial Birkhäuser. Series: Progress in Mathematics, vol. 264.

Juan C. Migliore
University of Notre Dame, EUA